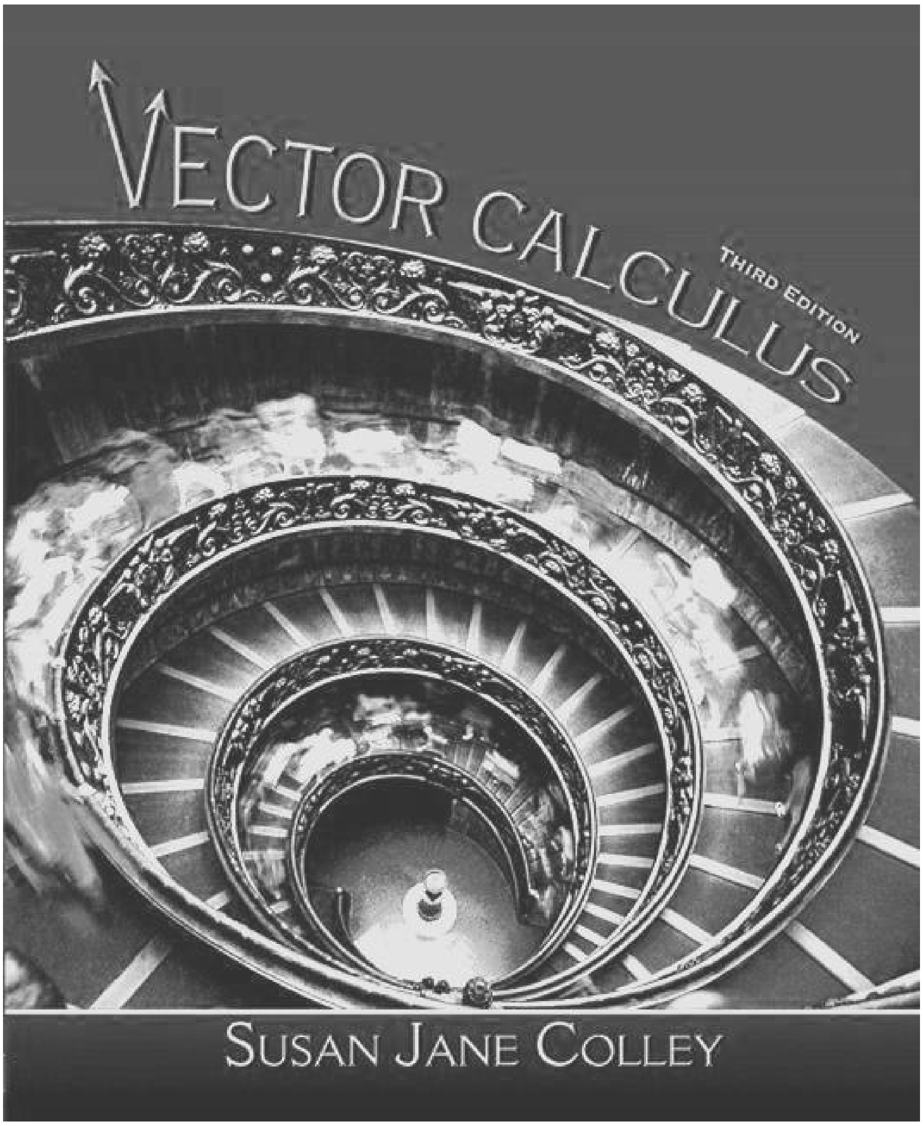
Samenvatting Tentamenstof Vectoranalyse RuG



Rianne Veenstra

Juni 2010

.

Hoofdstuk 2: Differentiëren in meerdere variabelen

2.2 Limieten

Gevoelsmatige definitie van limiet

De vergelijking

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}$$

waar $\boldsymbol{f} : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$, betekent dat we $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{L}\|$ zo klein kunnen maken als we willen door $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|$ klein genoeg te houden.

Officiële definitie van limiet

Laat $\boldsymbol{f} : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ een functie zijn. Dan betekent

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}$$

dat voor elke gegeven $\epsilon > 0$, je een $\delta > 0$ (die meestal afhankelijk is van ϵ) kan vinden, zodat als $\boldsymbol{x} \in X$ en $0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < \delta$, dan $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{L}\| < \epsilon$

Een verzameling $X \subseteq \boldsymbol{R}^n$ heet open in $\boldsymbol{R}^n$ als, voor elk punt $\boldsymbol{x} \in X$ er een open bal is met middelpunt $\boldsymbol{x}$ die helemaal in X ligt.

Een punt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ ligt op de grens van een verzameling $X \subseteq \boldsymbol{R}^n$ als elke open bal met middelpunt $\boldsymbol{x}$ punten bevat die in X liggen en punten die niet in X liggen. Het maakt dan niet uit hoe groot deze bal is.

Een verzameling $X \subseteq \boldsymbol{R}^n$ heet gesloten in $\boldsymbol{R}^n$ als het alle grenspunten bevat.

Een omgeving van een punt $\boldsymbol{x} \in X$ is een open verzameling die $\boldsymbol{x}$ bevat, en die in X ligt.

Stel $\boldsymbol{f} : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ is een vector-functie.
Dan $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}$, waar $\boldsymbol{L} = (L_1, ..., L_m) \Leftrightarrow \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f_i(x) = L_i$ voor $i = 1, ..., m$

Laat $\boldsymbol{f} : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ en laat $\boldsymbol{a} \in X$. Dan $\boldsymbol{f}$ heet continu in $\boldsymbol{a}$ als

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$$

Als $\boldsymbol{f}$ continu is in alle punten van zijn domein X, dan noemen we $\boldsymbol{f}$ continu.

Als $\boldsymbol{f} : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ en $\boldsymbol{g} : Y \subseteq \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^p$ continue functies zijn, zodat $bereik\boldsymbol{f} \subseteq Y$, dan is de samengestelde functie $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^p$ gedefinieerd en ook continu.

2.3 De afgeleide

De partiële afgeleide van $\boldsymbol{f}$ naar x_i is de 'gewone' afgeleide van de partiële functie naar x_i. Dit betekent $F'(x_i) = D_{x_i} f(x_1, ..., x_n) = f_{x_i}(x_1, ..., x_i) =$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n}{h}$$

Als de grafiek van $z = f(x, y)$ een raakvlak heeft in $(a, b, f(a, b))$, dan heeft dat raakvlak de vergelijking $z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$

Laat X open zijn in $\boldsymbol{R}^n$ en $f: X \to \boldsymbol{R}$ een scalar-functie; laat $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in X$. We zeggen dat f is differentieerbaar in $\boldsymbol{a}$ als alle partiële afgeleiden $f_{x_i}(\boldsymbol{a}), i = 1, ..., n$ bestaan en als de functie $h: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ gedefinieerd door

$$h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + f_{x_1}(\boldsymbol{a})(x_1 - a_1) + f_{x_2}(\boldsymbol{a})(x_2 - a_2) + ... + f_{x_n}(\boldsymbol{a})(x_n - a_n)$$

een goede lineaire benadering van f is in de buurt van $\boldsymbol{a}$, dat betekent dat

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - h(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0$$

De matrix van partiële afgeleiden van $\boldsymbol{f}$ genoteerd met $D\boldsymbol{f}$ is de $m \times n$ matrix wiens ijde plaats is $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, waar $f_i: X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ de $i$de componentfunctie is van $\boldsymbol{f}$:

$$D\boldsymbol{f}(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Definitie van differentieerbaarheid
Laat $X \subseteq \boldsymbol{R}^n$ een open verzameling zijn, laat $\boldsymbol{f}: X \to \boldsymbol{R}^m$, en laat $\boldsymbol{a} \in X$. We zeggen dat $\boldsymbol{f}$ is differentieerbaar in $\boldsymbol{a}$ als $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ bestaat en als de functie $\boldsymbol{h}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ gedefinieerd door

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$$

een goede lineaire benadering is van $\boldsymbol{f}$ in de buurt van $\boldsymbol{a}$, dat betekent dat moet gelden:

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) + D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})]\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0$$

Als $\boldsymbol{f}: X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ differentieerbaar is in $\boldsymbol{a}$, dan is $\boldsymbol{a}$ continu in $\boldsymbol{a}$.

Als $\boldsymbol{f}: X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ zo is dat voor $i = 1, ..., m$ en $j = 1, ..., n$ alle $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ bestaan en continu zijn in een omgeving van $\boldsymbol{a}$ in X, dan is $\boldsymbol{f}$ differentieerbaar in $\boldsymbol{a}$

Een functie $\boldsymbol{f}: X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ is differentieerbaar in $\boldsymbol{a} \in X \Leftrightarrow$ de componentfuncties $f_i: X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}, i = 1, ..., m$ van $\boldsymbol{f}$ zijn differentieerbaar in $\boldsymbol{a}$.

2.4 Hogere orde partiële afgeleiden

Laat $f, g: X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ differentieerbaar zijn in $\boldsymbol{a} \in X$, dan geldt:

1. De productfunctie fg is ook differentieerbaar in $\boldsymbol{a}$ en
   $D(fg)(\boldsymbol{a}) = g(\boldsymbol{a})Df(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a})Dg(\boldsymbol{a})$
2. Als $g(\boldsymbol{a}) \neq 0$, dan is de quotiëntfunctie f/g ook differentieerbaar in $\boldsymbol{a}$ en
   $D(f/g)(\boldsymbol{a}) = \frac{g(\boldsymbol{a})Df(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a})Dg(\boldsymbol{a})}{g(\boldsymbol{a})^2}$

Neem aan dat X open is in $\boldsymbol{R}^n$. Een scalarfunctie $f: X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ wiens partiële afgeleiden tot en met tenminste orde k bestaan en continu zijn op X heten van klasse C^k. Als f continue partiële afgeleiden heeft van alle ordes op X, dan heet f van klasse C^∞ of glad. Een vectorfunctie $\boldsymbol{f}: X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ is van klasse C^k (respectievelijk van klasse C^∞) $\Leftrightarrow$ ieder van zijn componentfuncties is van klasse C^k (respectievelijk van klasse C^∞)

Laat $f : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ een scalarfunctie zijn van klasse C^k. Dan maakt de volgorde waarin we een $k$de orde partiële afgeleide uitrekenen niet uit: Als $(i_1, ..., i_k)$ k integers zijn (niet persé onderscheiden) tussen 1 en n, en als $(j_1, ..., j_k)$ een herordening is van deze integers, dan geldt:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}$$

2.5 De kettingregel

De kettingregel voor één variabele

Laat X en T open verzamelingen zijn van $\boldsymbol{R}$ en $f : X \subseteq \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ en $x : T \subseteq \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ zijn functies zo gedefinieerd dat de samengestelde functie $f \circ x : T \to \boldsymbol{R}$ bestaat. Dit betekent dat het bereik van x in X moet liggen. Als x differentieerbaar is in $t_0 \in T$ en f is differentieerbaar in $x_0 = x(t_0) \in X$, dan is de samengestelde functie $f \circ x$ differentieerbaar in t_0 en geldt:

$$(f \circ x)'(t_0) = f'(x_0)x'(t_0)$$

Neem aan dat $\boldsymbol{x} : T \subseteq \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$ differentieerbaar is in $t_0 \in T$, en $f : X \subseteq \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ is differentieerbaar in $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0) = (x_0, y_0) \in X$, waar T en X open verzamelingen zijn in respectievelijk $\boldsymbol{R}$ en $\boldsymbol{R}^2$, en het bereik van $\boldsymbol{x}$ ligt in X. Als bovendien f van klasse C^1 is, dan is $f \circ \boldsymbol{x} : T \to \boldsymbol{R}$ differentieerbaar in t_0 en

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)\frac{\partial x}{\partial t}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}_0)\frac{\partial y}{\partial t}(t_o)$$

$\frac{df}{dt}(t_0) = Df(\boldsymbol{x}_0)D\boldsymbol{x}(t_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{x}'(t_0)$

De kettingregel

Neem aan dat $X \subseteq \boldsymbol{R}^m$ en $T \subseteq \boldsymbol{R}^n$ open verzamelingen zijn en $\boldsymbol{f} : X \to \boldsymbol{R}^p$ en $\boldsymbol{x} : T \to \boldsymbol{R}^m$ zijn zo gedefinieerd dat het bereik van $\boldsymbol{x} \subseteq X$. Als $\boldsymbol{x}$ differentieerbaar is in $\boldsymbol{t}_0 \in T$ en $\boldsymbol{f}$ is differentieerbaar in $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)$, dan is de samengestelde functie $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{x}$ differentieerbaar in $\boldsymbol{t}_0$ en geldt:

$$D(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{x})(\boldsymbol{t}_0) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)D\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)$$

Voor het afleiden van functies in poolcoördinaten gelden de volgende regels:

$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}$

$\frac{\partial}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial}{\partial y}$

$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$

$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$

2.6 Richtingsafgeleiden en de gradiënt

Laat X open zijn in $\boldsymbol{R}^n$, $f : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ een scalarfunctie, en $\boldsymbol{a} \in X$. Als $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ een eenheidsvector zijn, dan is de richtingsafgeleide van f in $\boldsymbol{a}$ in de richting van $\boldsymbol{v}$:

$$D_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{h}$$

Laat $X \subseteq \boldsymbol{R}^n$ open zijn en neem aan dat $f : X \to \boldsymbol{R}$ differentieerbaar is in $\boldsymbol{a} \in X$. Dan bestaat de richtingsafgeleide $D_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{a})$ voor alle richtingen (eenheidsvectoren) $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ en geldt:

$$D_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}$$

De richtingsafgeleide $D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a})$ is maximaal als $\boldsymbol{u}$ in dezelfde richting wijst als $\nabla f(\boldsymbol{a})$, en is minimaal als $\boldsymbol{u}$ in de tegenovergestelde richting wijst. De maximum en minimum waardes van $D_{\boldsymbol{u}} f(\boldsymbol{a})$ zijn respectievelijk $\|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$ en $-\|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$

Laat $X \subseteq \boldsymbol{R}^n$ een open verzameling zijn en $f : X \to \boldsymbol{R}$ een functie zijn van klasse C^1. Als $\boldsymbol{x}_0$ een punt is op de niveauverzameling $S = \{\boldsymbol{x} \in X | f(\boldsymbol{x}) = c\}$, dan staat de vector $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ loodrecht op S.

Als S een oppervlak is in $\boldsymbol{R}^3$ gedefinieerd door een vergelijking van de vorm $f(x, y, z) = c$ en $\boldsymbol{x}_0 \in X$, dan staat de gradiëntvector $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ loodrecht op S. Als deze vector niet nul is, is het dus de normaal op het raakvlak aan S in $\boldsymbol{x}_0$. De vergelijking voor het raakvlak aan S in $\boldsymbol{x}_0$ is dan:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+f_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$$

De impliciete functiestelling

Laat $F : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ van klasse C^1 zijn en laat $\boldsymbol{a}$ een punt zijn van de niveauverzameling $S = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n | F(\boldsymbol{x}) = c\}$. Als $F_{x_n}(\boldsymbol{a}) \neq 0$, dan is er een omgeveing U van $(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ in $\boldsymbol{R}^{n-1}$, een omgeving V van a_n in $\boldsymbol{R}$, en een functie $f : U \subseteq \boldsymbol{R}^{n-1} \to V$ van klasse C^1, zodat als $(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \in U$ en $x_n \in V$ voldoen aan $F(x_1, x_2, ..., x_n) = c$ (dat betekent $(x_1, x_2, ..., x_n) \in S$), dan $x_n = f(x_1, x_2, .., x_{n-1})$ Dit betekent dat in de buurt van een punt $\boldsymbol{a} \in S$ zodat $\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$, de niveauverzameling S gegeven door de vergelijking $F(x_1, x_2, ..., x_n) = c$ locaal ook de grafiek is van een functie $x_n = f(x_1, ..., x_{n-1})$.

Algemeen geval van de impliciete functiestelling

Neem aan dat $\boldsymbol{F} : A \to \boldsymbol{R}^m$ van klasse C^1 is, waar A open is in $\boldsymbol{R}^{n+m}$. Laat $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m) \in A$ voldoen aan $\boldsymbol{F(a, b) = c}$. Als de determinant

$$\Delta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \end{bmatrix} \neq 0$$

dan is er een omgeving U van $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{R}^n$ en een unieke functie $\boldsymbol{f} : U \to \boldsymbol{R}^m$ van klasse C^1 zodat $\boldsymbol{F(x, f(x)) = c}\ \forall\ \boldsymbol{x} \in U$. Met andere woorden, we kunnen $\boldsymbol{y}$ locaal schrijven als een functie $\boldsymbol{f(x)}$

Inverse functietheorie

Neem aan dat $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_n)$ van klasse C^1 is op een open verzameling $A \subseteq \boldsymbol{R}^n$. Als de Jacobiaan

$$detD\boldsymbol{f(a)} = \frac{\partial(f_1, ..., f_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)}|_{\boldsymbol{x=a}} \neq 0$$

dan is er een open verzameling $U \subseteq \boldsymbol{R}^n$ die $\boldsymbol{a}$ bevat, zodat $\boldsymbol{f}$ is een-op-een op U, de verzameling $V = \boldsymbol{f}(U)$ is ook open, en er is een uniek bepaalde inverse functie $\boldsymbol{g} : V \to U$ naar $\boldsymbol{f}$, die ook van klasse C^1 is. Met andere woorden, het stelsel vergelijkingen $\boldsymbol{y = f(x)}$ kan uniek worden opgelost als $\boldsymbol{x = g(y)}$ voor $\boldsymbol{x}$ in de buurt van $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{y}$ in de buurt van $\boldsymbol{b}$

Hoofdstuk 3: Vectorfuncties

3.1 Geparametriseerde krommen

Een pad in $\boldsymbol{R}^n$ is een continue functie $\boldsymbol{x} : I \to \boldsymbol{R}^n$. Als $I = [a, b]$ voor getallen $a < b$, dan heten de punten $\boldsymbol{x}(a)$ en $\boldsymbol{x}(b)$ eindpunten van het pad $\boldsymbol{x}$.

Laat $\boldsymbol{x} : I \to \boldsymbol{R}^n$ een differentieerbaar pad zijn. De snelheid (velocity) $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{x}'(t)$ bestaat, en we definiëren de snelheid (speed) van $\boldsymbol{x}$ als de grootte van de snelheid (velocity); $snelheid = \|\boldsymbol{v}(t)\|$.
Als $\boldsymbol{v}$ differentieerbaar is, noemen we $\boldsymbol{v}'(t) = \boldsymbol{x}''(t)$ de versnelling van $\boldsymbol{x}$ en noteren we dat met $\boldsymbol{a}(t)$

Laat $\boldsymbol{x}$ een differentieerbaar pad zijn en stel dat $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}(t_0) \neq \boldsymbol{0}$. Dan is een paramterische vectorvergelijking voor de raaklijn aan $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$:

$$\boldsymbol{l}(s) = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{v}_0$$

of

$$\boldsymbol{l}(t) = \boldsymbol{x}_0 + (t - t_0)\boldsymbol{v}_0$$

3.2 Padlengte

De lengte $L(\boldsymbol{x})$ van een C^1 pad $\boldsymbol{x} : [a, b] \to \boldsymbol{R}^n$ kan je vinden door de snelheid te integreren:

$$L(\boldsymbol{x}) = \int_a^b \|\boldsymbol{x}'(t)\| \, dt$$

3.3 Introductie op vectorvelden

Een vectorveld op $\boldsymbol{R}^n$ is een afbeelding $\boldsymbol{F} : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$

Een gradientveld op $\boldsymbol{R}^n$ is een vectorveld $\boldsymbol{F} : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ zodat $\boldsymbol{F}$ de gradient is van een differentieerbare scalarfunctie $f : X \to \boldsymbol{R}$. Dat is $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x})$

Een stroomlijn (flow-line) van een vectorveld $\boldsymbol{F} : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ is een differentieerbaar pad $\boldsymbol{x} : I \to \boldsymbol{R}^n$ zodat $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)$. Dat betekent dat de snelheidsvector van $\boldsymbol{x}$ op een tijd t gegeven wordt door de waarde van het vectorveld $\boldsymbol{F}$ op het punt $\boldsymbol{x}$ op tijd t.

3.4 Gradient, Divergentie en Rotatie

De del operator ∇ is gedefiniëerd door $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$.

De gradient maakt van een scalair veld een vectorveld. $\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$.

De divergentie maakt van een vectorveld een scalair veld.
$div\ \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$, waar $x_1, ..., x_n$ de Cartesische coördinaten zijn voor $\boldsymbol{R}^n$ en $F_1, ..., F_n$ de component functies van $\boldsymbol{F}$.
Een vectorveld waarvoor geldt $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$ heet onsamendrukbaar.

De rotatie maakt van een vectorveld een ander vectorveld (is alleen gedefiniëerd op $\boldsymbol{R}^3$.
$curl\ \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = (\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}) \times (F_1\boldsymbol{i} + F_2\boldsymbol{j} + F_3\boldsymbol{k}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$
$(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z})\boldsymbol{i} + (\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x})\boldsymbol{j} + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\boldsymbol{k}$. Een vectorveld waarvoor geldt $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ heet rotatievrij.

Laat $f : X \subseteq \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ van klasse C^2 zijn. Dan geldt $curl(grad\ f) = 0$. Dit betekent dat gradientvelden rotatievrij zijn.

Laat $\boldsymbol{F} : X \subseteq \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ van klasse C^2 zijn. Dan geldt $div(curl\ \boldsymbol{F}) = 0$. Dit betekent dat de rotatie van $\boldsymbol{F}$ ($curl\ \boldsymbol{F}$) onsamendrukbaar is.

<u>Poolcoördinaten</u>
Laat $f : X \subseteq \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ en $\boldsymbol{F} : Y \subseteq \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ respectievelijk differentieerbare scalar- en vectorvelden zijn. Dan geldt:

$$\nabla\ f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right]$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}$$

Hierin geldt: $\begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta j \\ \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{k} \end{cases}$

<u>Bolcoördinaten</u>
Laat $f : X \subseteq \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ en $\boldsymbol{F} : Y \subseteq \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ respectievelijk differentieerbare scalar- en vectorvelden zijn. Dan geldt:

$$\nabla\ f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin\varphi F_\varphi) + \frac{1}{\rho\sin\varphi}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & \rho\sin\varphi F_\theta \end{vmatrix}$$

Hierin geldt: $\begin{cases} \boldsymbol{e}_\rho = \sin\varphi\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{j} + \cos\varphi\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{e}_\varphi = \cos\varphi\cos\theta\boldsymbol{i} + \cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{j} - \sin\varphi\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta j \end{cases}$

Hoofdstuk 4: Maxima en minima in meerdere variabelen

4.1 Afgeleiden en Taylor's theorie

Taylor's theorie in één variabele

Laat X open zijn in $\boldsymbol{R}$ en $f : X \subseteq \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ differentieerbaar tot (ten minste) orde k, neem $a \in X$. Neem

$$p_k(a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Dan $f(x) = p_k(x) + R_k(x,a)$ waar de restterm R_k zo is dat $\lim_{x \to a} \frac{R_k(x,a)}{(x-a)^k} = 0$.

Eerste orde Taylor in meerdere variabelen

Laat X open zijn in $\boldsymbol{R}^n$ en neem aan dat $f : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ differentieerbaar is in een punt $\boldsymbol{a} \in X$. Neem

$$p_1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + Df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}) + Df(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})h_i$$

Waar $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$

Dan $f(x) = p_1(\boldsymbol{x}) + R_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ waar de restterm R_1 zo is dat $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{R_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|} = 0$.

Laat $f : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ en $\boldsymbol{a} \in X$. De incremental change/verandering van f, Δf is $\Delta f = f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h} - f(\boldsymbol{a})$.

De totale differentiaal van f, $df(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h})$ is $df(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a})h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})h_n$

Voor $\boldsymbol{h} \approx \boldsymbol{0}$ geldt $\Delta f \approx df$.

Soms wordt h_i vervangen door Δx_i of d_i: $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$

Tweede orde Taylor formule

Laat X open zijn in $\boldsymbol{R}^n$ en neem aan $f : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ is van klasse C^2. Neem

$$p_2(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{i=1} f_{x_i}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) = f(\boldsymbol{a}) + Df(\boldsymbol{a})h + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T Hf(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}.$$

$$\text{Waar } Hf = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \cdots & f_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{bmatrix}$$

de Hessiaan is van f.

Dan $f(\boldsymbol{x}) = p_2(\boldsymbol{x}) + R_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$ waar de restterm R_2 zo is dat $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{|R_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|^2} = 0$.

k-de orde Taylor formule

$$p_k(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{k!}\sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{n} f_{x_{i_1} \cdots x_{i_k}}(x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k})$$

4.2 Extrema van functies

f heeft een lokaal minimum in een punt $\boldsymbol{a} \in X$ als er een omgeving U van $\boldsymbol{a}$ bestaat zodat $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a}) \forall \boldsymbol{x} \in U$.
f heeft een lokaal maximium in een punt $\boldsymbol{a} \in X$ als er een omgeving U van $\boldsymbol{a}$ bestaat zodat $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a}) \forall \boldsymbol{x} \in U$.
f kan lokale maxima en minima hebben en geen globaal/absoluut maximum of minimum.

Laat X open zijn in $\boldsymbol{R}^n$ en laat $f : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow \boldsymbol{R}$ differentieerbaar zijn. Als f een locaal extremum heeft in $\boldsymbol{a} \in X$, dan geldt $Df(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

Laat $U \subseteq \boldsymbol{R}^n$ open zijn en $f : U \rightarrow \boldsymbol{R}$ een functie van klasse C^2. Stel dat $\boldsymbol{a} \in U$ een kritiek punt is van f.

1. Als de Hessiaan $Hf(\boldsymbol{a})$ positief definiet is, dan heeft f een lokaal minimum in $\boldsymbol{a}$
2. Als de Hessiaan $Hf(\boldsymbol{a})$ negatief definiet is, dan heeft f een lokaal maximum in $\boldsymbol{a}$
3. Als $det\ Hf(\boldsymbol{a}) \neq 0$, maar $Hf(\boldsymbol{a})$ is noch positief noch negatief definiet, dan heeft f een zadelpunt in $\boldsymbol{a}$

Test voor lokale extrema
Gegeven een kritiek punt $\boldsymbol{a}$ van een functie f van klasse C^2, kijk naar de Hessiaan matrix in $\boldsymbol{a}$:

$$Hf(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\boldsymbol{a}) & f_{x_1x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\boldsymbol{a}) \\ f_{x_2x_1}(\boldsymbol{a}) & f_{x_2x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & f_{x_2x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\boldsymbol{a}) & f_{x_nx_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix}$$

Bereken uit de Hessiaan de opeenvolgende leidende minoren van $Hf(\boldsymbol{a})$. Dit is de rij van de determinanten van de vierkante submatrices linksboven in $Hf(\boldsymbol{a})$. Dit is dus de rij $d_1, d_2, ..., d_n$, waar $d_k = detH_k$ en H_k is de $k \times k$ submatrix linksboven in $Hf(\boldsymbol{a})$:

$$d_1 = f_{x_1x_1}(\boldsymbol{a})$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(\boldsymbol{a}) & f_{x_1x_2}(\boldsymbol{a}) \\ f_{x_2x_1}(\boldsymbol{a}) & f_{x_2x_2}(\boldsymbol{a}) \end{vmatrix}$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(\boldsymbol{a}) & f_{x_1x_2}(\boldsymbol{a}) & f_{x_1x_3}(\boldsymbol{a}) \\ f_{x_2x_1}(\boldsymbol{a}) & f_{x_2x_2}(\boldsymbol{a}) & f_{x_2x_3}(\boldsymbol{a}) \\ f_{x_3x_1}(\boldsymbol{a}) & f_{x_3x_2}(\boldsymbol{a}) & f_{x_3x_3}(\boldsymbol{a}) \end{vmatrix}$$

$$, ..., d_n = |Hf(\boldsymbol{a})|$$

Als $d_n = detHf(\boldsymbol{a}) \neq 0$ geldt dan:

1. Als $d_k > 0$ voor $k = 1, 2, ..., n$, dan heeft f een lokaal minimum in $\boldsymbol{a}$
2. Als $d_k < 0$ voor $k =$ oneven en $d_k > 0$ voor $k =$ even, dan heeft f een lokaal maximum in $\boldsymbol{a}$
3. Als 1 en 2 beide niet voldoen, dan heeft f een zadelpunt in $\boldsymbol{a}$.

Als $detHf(\boldsymbol{a}) = 0$ dan is het kritieke punt $\boldsymbol{a}$ degenerate en moet er een andere methode gebruikt worden om het karakter van het kritieke punt te bepalen.

Een deelverzameling $X \subseteq \boldsymbol{R}^n$ heet compact als hij zowel gesloten als begrensd is.

Extreme waarden theorie/Weierstrass

Als $X \subseteq \boldsymbol{R}^n$ compact is en $f : X \to \boldsymbol{R}$ continu is, dan moet f zowel een globaal maximum als een globaal minimum hebben ergens op X. Dit beteken dat er punten $\boldsymbol{a}_{min}$ en $\boldsymbol{a}_{max}$ moeten bestaan zodat $\forall \boldsymbol{x} \in X$ geldt:

$$f(\boldsymbol{a}_{min}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a}_{max})$$

Voor de berekening van extrema op de randen van een gebied, zie voorbeeld 7 op blz 254 uit het boek

4.3 Lagrange multipliers

Laat X open zijn in $\boldsymbol{R}^n$ en $f, g : X \to \boldsymbol{R}$ functies van klasse C^1.
Laat $S = \{\boldsymbol{x} \in X | g(\boldsymbol{x}) = c\}$ de niveaukromme van g op hoogte c aangeven. Als $f|_S$ (de restrictie van f tot S) een extremum heeft in $\boldsymbol{x}_0 \in S$ zodat $\nabla g(\boldsymbol{x}_0) \neq \boldsymbol{0}$, dan moet er een scalar λ zijn zodat: $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{x}_0)$.

Om kandidaatextrema van f te vinden onder de voorwaarde $g(\boldsymbol{x}) = c$, dan kan het volgende stappenplan gebruikt worden:

1. Vorm de vectorvergelijking $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{x})$
2. Los het syteem op: $\begin{cases} \nabla f(\boldsymbol{x}) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{x}) \\ g(\boldsymbol{x}) = c \end{cases}$
   voor $\boldsymbol{x}$ en λ.
   Dit is het volgende systeem van vergelijkingen:
   $$\begin{cases} f_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda g_{x_1}(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_{x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda g_{x_2}(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda g_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \\ g(x_1, x_2, ..., x_n) = c \end{cases}$$
   De oplossingen voor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, samen met de andere punten die voldoen aan $g(\boldsymbol{x}) = c$ en $\nabla g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, zijn de kandidaten voor extrema van het probleem.
3. Bepaal het karakter van f (minimum, maximum of geen van beide) in de kritieke punten gevonden in punt 2.

Laat X open zijn in $\boldsymbol{R}^n$ en laat $f, g_1, g_2, ..., g_k : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ functies zijn van klasse C^1, waar $k < n$. Laat $S = \{\boldsymbol{x} \in X | g_1(\boldsymbol{x}) = c_1, .., g_k(\boldsymbol{x}) = c_k\}$. Als $f|_S$ een etremum heeft in $\boldsymbol{x}_0$ waar $\nabla g_1(\boldsymbol{x}_0), ..., \nabla g_k(\boldsymbol{x}_0)$ lineair onafhankelike vectoren zijn. Dan moeten er scalars $\lambda_1, ..., \lambda_k$ bestaat zodat:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \lambda_1 \nabla g_1(\boldsymbol{x}_0) + \lambda_2 \nabla g_2(\boldsymbol{x}_0) + ... + \lambda_k \nabla g_k(\boldsymbol{x}_0)$$

Test voor lokale extrema onder voorwaarden

Gegeven een voorwaardelijk kritiek punt $\boldsymbol{a}$ van f onder de voorwaarden $g_1(\boldsymbol{x}) = c_1, g_2(\boldsymbol{x}) = c_2, ..., g_k(\boldsymbol{x}) = c_k$. Maak de volgende $(n+k) \times (n+k)$ matrix:

$$HL(\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\partial g_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ -\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) & \cdots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n n}(\boldsymbol{a}) & h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix}$$

waar $h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}) - \lambda_1 \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}) - \lambda_2 \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}) - \cdots - \lambda_k \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a})$

Laat H_j de $j \times j$ submatrix linksboven in $HL(\boldsymbol{\lambda}; \boldsymbol{a})$ zijn. Laat voor $j = 1, 2, ..., k+n$ $d_j = det\ H_j$, en bereken de volgende rij van $n-k$ getallen:

$$(-1)^k d_{2k+z}, (-1)^k d_{2k+2}, ..., (-1)^k d_{k+n}$$

Als $d_{k+n} = det(HL(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{a})) \neq 0$ geldt dan:

1. Als de rij getallen alleen uit positieve getallen bestaat, dan heeft f een lokaal minimum in $\boldsymbol{a}$ dat voldoet aan $g_1(\boldsymbol{x}) = c_1, g_2(\boldsymbol{x}) = c_2, ..., g_k(\boldsymbol{x}) = c_k$
2. als de rij getallen begint met een negatief getal en daarna alterneert in teken, dan heeft f een lokaal maximum in $\boldsymbol{a}$ dat voldoet aan $g_1(\boldsymbol{x}) = c_1, g_2(\boldsymbol{x}) = c_2, ..., g_k(\boldsymbol{x}) = c_k$
3. Als 1 en 2 beide niet voldoen, dan heeft f een zadelpunt in $\boldsymbol{a}$.

In het geval dat $det(HL(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{a})) = 0$, dan is het voorwaardelijk kritieke punt $\boldsymbol{a}$ degenerate en moet er een andere methode gebruikt worden om het karakter van het kritieke punt te bepalen.

Hoofdstuk 5: Meervoudige integratie

Verandering van variabelen in dubbele integralen

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\ dy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\ dv$$

Oppervlakte elementen

Cartesisch: $dA = dx\ dy$

Pool: $dA = r\ dr\ d\theta$

Algemeen: $dA = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\ dv$

Hierin geldt: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

Verandering van variabelen in drievoudige integralen

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dx\ dy\ dz = \iiint\limits_{E^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\ dv\ dw$$

Volume elementen

Cartesisch: $dA = dx\ dy\ dz$

Cilinder: $dA = r\ dr\ d\theta\ dz$

Bol: $dA = \rho^2 \sin\varphi\ d\rho\ d\varphi\ d\theta$

Algemeen: $dA = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\ dv\ dw$

De rest van het hoofdstuk wordt bekend verondersteld.

Hoofdstuk 6: Lijnintegralen

6.1 Scalar- en vector- lijnintegralen

De scalar lijnintegraal van f over het pad $\boldsymbol{x}$ van klasse C^1 is $\int_{\boldsymbol{x}} f\ ds = \int_a^b f(\boldsymbol{x}(t))\ \|\boldsymbol{x}'(t)\|\ dt$.

De vector lijnintegraal van $\boldsymbol{F}$ over $\boldsymbol{x} : [a,b] \to \boldsymbol{R}^n$ is $\int_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \boldsymbol{x}'(t) dt$.

Als je $\boldsymbol{F}$ ziet als een krachtveld in de ruimte, dan kan je $\int_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$ zien als de arbeid verricht door $\boldsymbol{F}$ op een deeltje, als dit deeltje lang het pad $\boldsymbol{x}$ beweegt.

De differentiaalvorm van een integraal is $\int_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{x}} M(x,y,z)dx + N(x,y,z0dy + P(x,y,z)dz$.

Laat $\boldsymbol{x} : [a,b] \to \boldsymbol{R}^n$ een deelsgewijs (piecewise) C^1 pad zijn. We zeggen dat een ander C^1 pad $\boldsymbol{y} : [c,d] \to \boldsymbol{R}^n$ een reparametrisatie is van $\boldsymbol{x}$ als er een functie $u : [c,d] \to [a,b]$ bestaat van klasse C^1 met inverse $u^{-1} : [a,b] \to [c,d]$ die ook van klasse C^1 is, zodat $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(u(t))$; dat is $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \circ u$.

Laat $\boldsymbol{x} : [a,b] \to \boldsymbol{R}^n$ een deelsgewijs C^1 pad zijn en laat $f : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ een continue functie zijn, wiens domein X het beeld van $\boldsymbol{x}$ bevat. Als $\boldsymbol{y} : [c,d] \to \boldsymbol{R}^n$ een reparametrisatie is van $\boldsymbol{x}$, dan geldt: $\int_{\boldsymbol{y}} f\ ds = \int_{\boldsymbol{x}} f\ ds$.

Laat $\boldsymbol{x} : [a,b] \to \boldsymbol{R}^n$ een deelsgewijs C^1 pad zijn en laat $\boldsymbol{F} : X \subseteq \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ een continu vectorveld zijn, wiens domein X het beeld van $\boldsymbol{x}$ bevat. Laat $\boldsymbol{y} : [c,d] \to \boldsymbol{R}^n$ een reparametrisatie zijn van $\boldsymbol{x}$. Dan

1. Als $\boldsymbol{y}$ oriëntatie bewarend is, dan $\int_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$.
2. Als $\boldsymbol{y}$ oriëntatie omkerend is, dan $\int_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$.

Met een kromme C bedoelen we het beeld van een deelsgewijs C^1 afbeelding $\boldsymbol{x} : [a,b] \to \boldsymbol{R}^n$. Zo'n curve heet simpel als hij zichzelf niet snijdt, dat is als het pad $\boldsymbol{x}$ een-op-een is op $[a,b]$, behalve dat $\boldsymbol{x}(a)$ gelijk mag zijn aan $\boldsymbol{x}(b)$. Als $\boldsymbol{x}(a) = \boldsymbol{x}(b)$ dan noemen we het pad $\boldsymbol{x}$ en het beeld C gesloten. Het (bijna) een-op-een pad $\boldsymbol{x}$ wiens beeld C is is een parametrisatie van C.
Als $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{y}$ beide parametrisaties zijn van dezelfde simpele kromme C, dan moeten ze reparametrisaties zijn van elkaar.

Simpele krommen, of ze nou gesloten zijn of niet, hebben altijd twee oriëntaties die corresponderen bij de twee mogelijke richtingen waarin je het pad kan doorlopen We zeggen dat een simpele kromme C georiënteerd is als er een oriëntatie is gekozen.

Als C een simpele kormme is, mogen we de scalar lijn integraal van een continue functie f over C definiëren als: $\int_C f\ ds = \int_{\boldsymbol{x}} f\ ds$. Hierin maakt het niet uit welke parametrisatie van C $\boldsymbol{x}$ is.
De vector lijn integraal kan alleen gedefiniëerd worden over georiënteerde krommen. Als een oriëntatie voor C is gekozen en $\boldsymbol{x}[a,b] \to \boldsymbol{R}^n$ is een parametrisatie die consistennt is met deze oriëntatie, dan geldt: $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$. Als de oriëntatie omgekeerd is geldt: $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$

6.2 Greens theorie

Greens theorie

Laat D een gesloten en begrensd gebied zijn in $\boldsymbol{R}^2$ wiens grens $C = \partial D$ bestaat uit een eindige hoeveelheid simpele gesloten krommen. Oriënteer de krommen van C zo dat D links ligt als je over C loopt. Laat $\boldsymbol{F}(x,y) = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ een vectorveld zijn van klasse C^1 door D. Dan geldt:

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$

$\oint_C$ betekent dat de lijn integraal genomen wordt over een of meer gesloten krommen.

Vector herformulering van Greens theorie

Als D een gebied is waarop Greens theorie van toepassing is en $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{i}$ is een vectorveld van klasse C^1 op D, dan geldt als D juist georiënteerd wordt:

$$\oint_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_D (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} dA$$

Divergentie theorie in het vlak

Als D een gebied is waarop Greens theorie van toepassing is, $\boldsymbol{n}$ de naar buiten wijzende eenheidsnormaalvector op D is, en $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{i}$ is een C^1 vectorveld op D. Dan geldt:

$$\oint_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} ds = \iint_D \nabla \cdot \boldsymbol{F} dA$$

$\boldsymbol{n} = \frac{y'(t)\boldsymbol{i} - x'(t)\boldsymbol{j}}{\|\boldsymbol{x}'(t)\|}$

$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} ds$ heet de flux.

Voor het bewijs van Greens theorie, zie het boek blz 385-388.

6.3 Conservatieve vectorvelden

Een continu vectorveld $\boldsymbol{F}$ heeft padonafhankelijke lijnintegralen als

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$$

voor elke twee simpele, deelsgewijs C^1, georiënteerde krommen die in het domein van $\boldsymbol{F}$ liggen en dezelfde begin- en eindpunten hebben.

$\boldsymbol{F}$ heeft padonafhankelijke lijnintegralen dan en slechts dan als $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$ voor alle deelsgewijs C^1, simpele, gesloten krommen C in het domein van $\boldsymbol{F}$.

Laat $\boldsymbol{F}$ gedefinieerd en continu zijn op een samenhangend, open gebied R in $\boldsymbol{R}^n$. Dan $\boldsymbol{F} = \nabla f$ (waar f een functie is van klasse C^1 op R) dan en slechts dan als $\boldsymbol{F}$ padonafhankelijke linintegralen heeft over krommen in R. $\boldsymbol{F}$ heet dan een conservatief vectorveld.

Als in dit geval C een deelsgewijs C^1, georiënteerde kromme is die ligt in R met beginpunt A en eindpunt B, dan geldt:

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = f(B) - f(A)$$

Een gebied $R \subseteq \boldsymbol{R}^n$ is samenhangend als elke twee punten in R verbonden kunnen worden met een pad wiens beeld ligt in R.

Een gebied R in $\boldsymbol{R}^2$ of $\boldsymbol{R}^3$ is eenvoudig samenhangend als het bestaat uit één samenhangend deel en als elke eenvoudige gesloten krommen C in R samengetrokken kan worden tot een punt terwijl het in R blijft tijdens het samentrekken.

Laat $\boldsymbol{F}$ een vectorveld zijn van klasse C^1 wiens domein een eenvoudig samenhangend gebied R is in $\boldsymbol{R}^2$ of $\boldsymbol{R}^3$. Dan $\boldsymbol{F} = \nabla f$ voor een scalarfunctie f van klasse C^2 dan en slechts dan als $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ in alle punten van R.
Een vectorveld $\boldsymbol{F}$ is dus een conservatief vectorveld als:

1. $\boldsymbol{F}$ gedefinieerd is op heel $\boldsymbol{R}^3$
2. $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ op heel $\boldsymbol{F}$

Voor de methode om een scalar potentiaalfunctie f te vinden, zie het boek blz 396 en 397 en de aantekeningen.

Hoofdstuk 7: Oppervlakte integralen en Vectoranalyse

7.1 Geparametriseerde oppervlakken

Een oppervlak in $\boldsymbol{R}^3$ kan op verschillende manieren analytisch worden weergegeven:

1. als een grafiek van een functie van twee variabelen; dat is, als punten (x, y, z) in $\boldsymbol{R}^3$ die voldoen aan $z = f(x, y)$
2. als een niveaukromme van een functie van drie variabelen; dat is, als punten (x, y, z) zodat $F(x, y, z) = c$.

Laat D een gebied zijn in $\boldsymbol{R}^2$ die bestaat uit een samenhangende open verzameling, eventueel samen met een paar of alle van zijn grenspunten. Een geparametriseerd oppervlak in $\boldsymbol{R}^3$ is een continue functie $\boldsymbol{X} : D \subseteq \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ die een op een is in D, behalve mogelijkerwijs over ∂D. We noemen het beeld $\boldsymbol{X}(D)$ het onderliggende vlak van $\boldsymbol{X}$ (of het vlak geparametriseerd door $\boldsymbol{X}$) en noemen dit S.

Stel dat $\boldsymbol{X}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ waar $(s,t) \in D$, een differentieerbare (of C^1) afbeelding is. Dan zeggen we dat het geparametriseerde oppervlak $S = \boldsymbol{X}(D)$ ook differentieerbaar (of C^1).

Het geparametriseerde oppervlak $S = \boldsymbol{X}(D)$ is glad in $\boldsymbol{X}(s_0, t_0)$ als de afbeelding $\boldsymbol{X}$ van klasse C^1 is in een omgeving van (s_0, t_0), en als de vector

$$\boldsymbol{N}(s_0 t, t_0) = \boldsymbol{T}_s(s_0, t_0) \times \boldsymbol{T}_t(s_0, t_0) \neq \mathbf{0}$$

Hierin zijn $\boldsymbol{T}_s(s_0, t_0)$ en $\boldsymbol{T}_t(s_0, t_0)$ de raakvectoren aan $\boldsymbol{X}$ in de s en t richting; $\boldsymbol{T}_s(s_0, t_0) = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial s}(s_0, t_0)$ e n $\boldsymbol{T}_t(s_0, t_0) = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}(s_0, t_0)$.
Als S glad is in elk punt $\boldsymbol{X}(s_0, t_0) \in S$, dan noemen we S een glad geparametriseerd oppervlak, de (nietnul) vector $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T}_s \times \boldsymbol{T}_t$ heet de standaard normaal vector bij de parametrisatie $\boldsymbol{X}$.

Als een geparametriseerd oppervlak glad is in een punt $\boldsymbol{X}(s_0, t_0)$, dan definieren we het raakvlak aan $S = \boldsymbol{X}(D)$ in het punt $\boldsymbol{X}(s_0, t_0)$ als het vlak dat door $\boldsymbol{X}(s_0, t_0)$ gaat en $\boldsymbol{N}(s_0, t_0) = \boldsymbol{T}_s(s_0, t_0) \times \boldsymbol{T}_t(s_0, t_0)$ als normaalvector heeft. Voor een vergelijking van dit vlak schrijven we (x, y, z) als $\boldsymbol{x}$. Dan is de vergelijking:

$$\boldsymbol{N}(s_0, t_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}(s_0, t_0)) = 0$$

Als de componenten van $\boldsymbol{N}(s_0, t_0)$ worden geschreven als $A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ en $\boldsymbol{X}(s_0, t_0)$ als $(x(s_0, t_0), y(s_0, t_0), z(s_0, t_0))$, dan kan dit geschreven worden als:

$$A(x - x(s_0, t_0)) + B(y - y(s_0, t_0)) + C(z - z(s_0, t_0)) = 0$$

Een deelsgewijs glad geparametriseerd oppervlak is de vereniging van afbeeldingen van eindig veel geparametriseerde oppervlakken $\boldsymbol{X}_i : D_i \to \boldsymbol{R}^3$, $i = 1, ..., m$ waar

- Elke D_i is een gebied in $\boldsymbol{R}^2$ die bestaat uit een samenhangende open verzameling, eventueel samen met een paar van zijn grenspunten (We willen dant D_1 een elementair gebied is).
- Elke $\boldsymbol{X}_i$ is va klasse C^1 en een op een in heel D_i, behalve mogelijkerwijs over ∂D_i
- Elke $S_i = \boldsymbol{X}(D_i)$ is glad, behalve mogelijkerwijs in eindig veel punten.

De oppervlakte van het oppervlak S (Surface area):

$$\iint_D \|\boldsymbol{T}_s \times \boldsymbol{T}_t\| \, dsdt = \iint_D \sqrt{(\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)})^2 + (\frac{\partial(x,z)}{\partial(s,t)})^2 + (\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)})^2} dsdt$$

De oppervlakte van de grafiek van $f(x, y)$ over D:

$$\iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dxdy = \iint_D \|N\| \, dxdy$$

7.2 Oppervlakte integralen

Laat $\boldsymbol{X} : D \to \boldsymbol{R}^3$ een glad geparametriseerd oppervlak zijn, waar $D \subset \boldsymbol{R}^2$ een begrensd gebied is. Laat f een continue functie zijn wiens domein $S = \boldsymbol{X}(D)$ bevat. Dan is de scalar oppervlakte integraal van f over $\boldsymbol{X}$:

$$\iint_{\boldsymbol{X}} f dS = \iint_D f(\boldsymbol{X}(s,t)) \|\boldsymbol{T}_s \times \boldsymbol{T}_t\| \, dsdt = \iint_D f(\boldsymbol{X}(s,t)) \|\boldsymbol{N}(s,t)\| \, dsdt$$

$$= \iint_D f(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \times \sqrt{(\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)})^2 + (\frac{\partial(x,z)}{\partial(s,t)})^2 + (\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)})^2} dsdt$$

$$= \iint_D f(x, y, g(x,y)) \sqrt{g_x(x,y)^2 + g_y(x,y)^2 + 1} dxdy$$

Laat $\boldsymbol{X} : D \to \boldsymbol{R}^3$ een glad geparametriseerd opervlak zijn, waar D een besloten gebied in het vlak is, en laat $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ een continu vectorveld zijn, wiens domein $S = \boldsymbol{X}(D)$ bevat. Dan is de vector oppervlakte integraal van $\boldsymbol{F}$ over $\boldsymbol{X}$:

$$\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(s,t)) \cdot \boldsymbol{N}(s,t) dsdt$$

waar $\boldsymbol{N}(s,t) = \boldsymbol{T}_s \times \boldsymbol{T}_t$.

Er geldt:

$$\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\boldsymbol{X}} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) dS = \iint_D \boldsymbol{F}(x, y, g(x,y)) \cdot (-g_x(x,y)\boldsymbol{i} - g_y(x,y)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) dxdy$$

Hierin is $\boldsymbol{n}$ de normaalvector met lengte 1 (eenheids normaalvector): $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{\|\boldsymbol{N}\|}$.

Laat $\boldsymbol{X} : D_1 \subseteq \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ en $\boldsymbol{Y} : D_2 \subseteq \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ geparametriseerde oppervlakken zijn. We zeggen dat $\boldsymbol{Y}$ een herparametrisatie is van $\boldsymbol{X}$ als er een functie $\boldsymbol{H} : D_2 \to D_1$ is zodat $\boldsymbol{Y}(s,t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{H}(s,t))$; dat is zodat $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{H}$. Als $\boldsymbol{X}$ en $\boldsymbol{Y}$ glad zijn, en $\boldsymbol{H}$ is van klasse C^1, dan zeggen we dat $\boldsymbol{Y}$ een gladde herparametrisatie is van $\boldsymbol{X}$.

Stel dat $\boldsymbol{X} : D_1 \to \boldsymbol{R}^3$ een glad geparametriseerd oppervlak is en $\boldsymbol{Y} : D_2 \to \boldsymbol{R}^3$ is een gladde herparametrisatie van $\boldsymbol{X}$ via $\boldsymbol{H} : D_2 \to D_1$, waar we $\boldsymbol{H}(s,t)$ noteren als (u,v). Dan zijn de standaard normaalvectoren $\boldsymbol{N_X}$ en $\boldsymbol{N_Y}$ gerelateerd door de vergelijking:

$$\boldsymbol{N_Y}(s,t) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \boldsymbol{N_X}(u,v)$$

We noemen $\boldsymbol{H}$ en $\boldsymbol{Y}$ oriëntatie bewarend als de Jacobiaan $\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}$ niet negatief is, en oriëntatie omkerend als de Jacobiaan niet positief is.

Laat $\boldsymbol{X} : D_1 \to \boldsymbol{R}^3$ een glad geparametriseerd oppervlak zijn en f een continue functie wiens domein $\boldsymbol{X}(D_1)$ bevat. Als $\boldsymbol{Y} : D_2 \to \boldsymbol{R}^3$ een gladde herparametrisatie is van $\boldsymbol{X}$, dan

$$\iint_{\boldsymbol{Y}} f dS = \iint_{\boldsymbol{X}} f dS$$

Verder geldt:

$$\iint_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

Als $\boldsymbol{Y}$ oriëntatie bewarend is.

$$\iint_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = -\iint_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

Als $\boldsymbol{Y}$ oriëntatie omkerend is.

Een glad, samenhangend oppervlak S is oriënteerbaar (of tweezijdig) als het mogelijk is om één eenheidsnormaalvector te definieren in elk punt van S, zodat in de buurt van deze vector de eenheidsnormaalvectoren daar dezelfde kant van S wijzen. Anders heet S niet-oriënteerbaar of eenzijdig

7.3 De theorieën van Stokes en Gauss

Stokes' theorie

Laat S eeen begrensd, deelsgewijs glad, georiënteerd oppervlak in $\boldsymbol{R}^3$ zijn. Neem aan dat ∂S bestaat uit eindig veel deelsgewijs C^1, simpele, gesloten krommen waarvan elke kromme consistent georiënteerd is met S (oriëntatie volgens de rechterhandregel met de normaalvector $\boldsymbol{n}$). Laat $\boldsymbol{F}$ een vectorveld zijn van klasse C^1 wiens domein S bevat. Dan geldt:

$$\iint_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$$

Gauss' theorie

Laat D een begrensd, massief gebied in $\boldsymbol{R}^3$ zijn, wiens grens ∂D bestaat uit eindig veel deelsgewijs gladde, gesloten, oriënteerbare oppervlakken, waarvan elk oppervlak georiënteerd is door eenheidsnormaalvectoren die van D af wijzen. Laat $\boldsymbol{F}$ een vectorveld zijn van klasse C^1 wiens domein D bevat. Dan geldt:

$$\oiint_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_D \nabla \cdot \boldsymbol{F} dV$$

Voor de bewijzen van deze theoriën, zie het boek blz 448-452

7.4 Maxwell vergelijkingen

De stof uit deze paragraaf wordt bijna nooit gevraagd op tentamens.